

Präsentation der Bachelorarbeit

Gibt es Sudokus mit 16 Vorgaben?



Einführung

- Sudoku jap. „Isolieren Sie die Zahlen“
- Zahlen vorgegeben
- Aufgabe: Ausfüllen des Gitters, sodass jede Ziffer genau einmal vorkommt in
 - Zeile
 - Spalte
 - Box

								1
							2	
					3			
				4		5		
		6				3		
		7	8	1				
	1			2				4
	3						7	
9	5							

Gibt es GÜLTIGE 16 Vorgaben Sudoku?

- Gültigkeit
 - genau eine Lösung
- Maß für Schwierigkeit
- Minimale Anzahl an Vorgaben

Beweisvorgang

- Beweis von Papier von Gary McGuire, Bastian Tugemann und Gilles Civario
- Brute-Force-Methode

Beweisvorgang – Einfachster Ansatz

- Einfachster Ansatz
 - Erstellung aller Sudokus mit 16 Vorgaben

1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
	2	3	4	5	6	7	8	9

Beweisvorgang – Suche in gelösten Sudokus

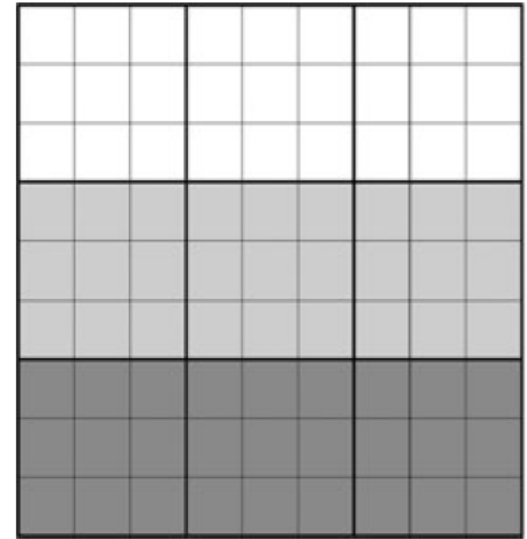
- Gefundene Sudokus mind. eine Lösung

2	7	3	9	6	4	8	5	1
4	6	9	1	5	8	7	2	3
1	8	5	2	7	3	4	6	9
8	2	1	3	4	6	5	9	7
5	4	6	7	9	2	3	1	8
3	9	7	8	1	5	2	4	6
7	1	8	5	2	9	6	3	4
6	3	2	4	8	1	9	7	5
9	5	4	6	3	7	1	8	2

- Aufzählen aller Lösungen (Bertram Felgenhauer und Frazer Jarvis)
 - $6.671 \cdot 10^{21}$

Beweisvorgang – Sudokugruppen

- Symmetrieoperatoren
 - Vertauschen der Ziffern
 - Permutieren Zeilen/Spalten
 - Permutieren Stapel/Bänder
 - Transponieren
- Gültigkeit bleibt erhalten
- Russel und Jarvis: 5472730538



Beweisvorgang – Unausweichliche Mengen

- 16-Vorgaben Sudokus enthalten $\binom{81}{16} \approx 3.36 \times 10^{16}$
- unausweichliche Mengen

2	7	3	9	6	4	8	5	1
4	6	9	1	5	8	7	2	3
1	8	5	2	7	3	4	6	9
8	2	1	3	4	6	5	9	7
5	4	6	7	9	2	3	1	8
3	9	7	8	1	5	2	4	6
7	1	8	5	2	9	6	3	4
6	3	2	4	8	1	9	7	5
9	5	4	6	3	7	1	8	2

2	7	3	9	6	4	8	5	1
4	6	9	1	5	8	7	2	3
1	8	5	2	3	7	4	6	9
8	2	1	3	4	6	5	9	7
5	4	6	7	9	2	3	1	8
3	9	7	8	1	5	2	4	6
7	1	8	5	2	9	6	3	4
6	3	2	4	8	1	9	7	5
9	5	4	6	7	3	1	8	2

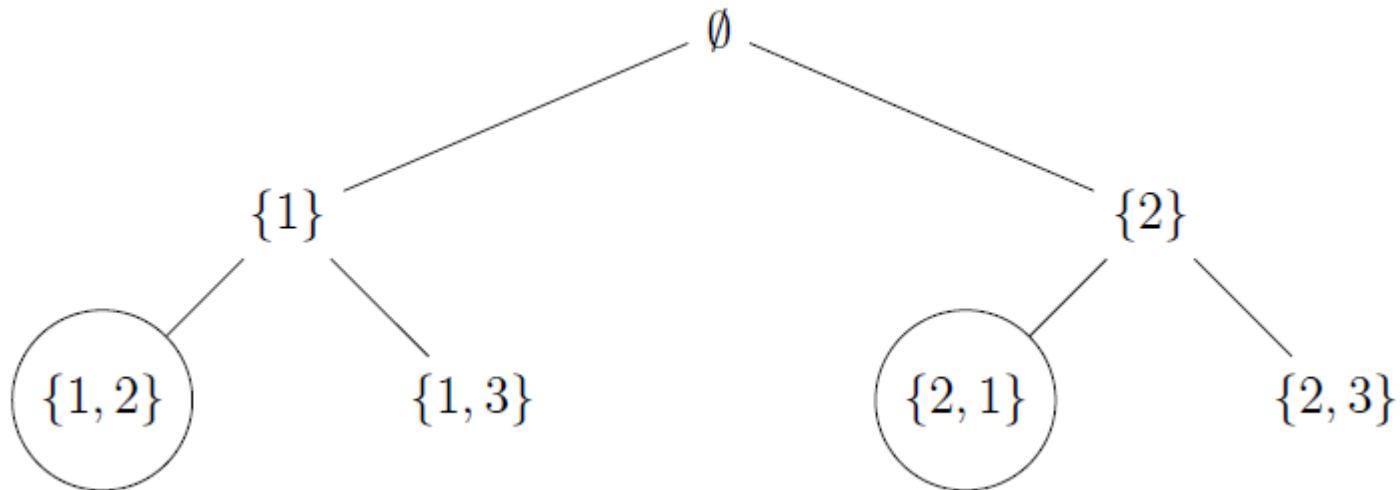
Beweisvorgang – Unausweichliche Mengen

- Jedes gültige Sudoku trifft diese
 - John Slaney
- Aufzählen von Hitting-Sets
- Finden via Muster

2	7	3	9	6	4	8	5	1												
4	6	9	1	5	8	7	2	3												
1	8	5	2	7	3	4	6	9			1	2								
8	2	1	3	4	6	5	9	7												
5	4	6	7	9	2	3	1	8												
3	9	7	8	1	5	2	4	6												
7	1	8	5	2	9	6	3	4												
6	3	2	4	8	1	9	7	5												
9	5	4	6	3	7	1	8	2			2	1								

Beweisvorgang – Hitting-Sets

- Backtracking
 - vollständige Suche
- Beispiel: $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$



- Ignorieren von Ziffern

Beweisvorgang - Sudoku Solver

- Hitting-Sets entsprechen Kandidaten
- Umwandlung in CSP
- Backtracking
 - Forward Checking
 - Dynamische Variablenordnung

Beweisvorgang - Fazit

- 4 Schritte
 - Erstellen von Vertreter aller Sudokugruppen
 - Finden von unausweichlichen Mengen
 - Aufzählen Kandidaten mit 16 Vorgaben
 - Prüfung der Kandidaten

Ergebnisse – 4x4 Sudokus

- Minimale Anzahl an Vorgaben: 4
- Gültiges Sudoku mit 4 Vorgaben
- 144 Lösungen
- Keine gültigen Sudokus mit 3 Vorgaben in diesen gefunden
- durchschnittliche Rechenzeit pro Lösung: 11 ms

1		3	
	4		2

Ergebnisse – 9x9 Sudokus

- Liste - Gordon Royle
- Durchsungszeit: 50 Minuten vs. 3 Sekunden
- Viele unausweichliche Mengen != schnelle Laufzeit
- Langsamer Sudoku Solver
 - Werteordnung

Fazit

- Minimale Vorgaben für 4x4 Sudokus: 4
- Beweismethode konnte bestätigt
- Hitting-Set Algorithmus für vollständige Suchen nutzbar
- Optimierung: 2006-2011

Quellen

- Abbildung auf Seite 7 aus:
Gary McGuire, Bastian Tugemann, and Gilles Civario. There is no 16-clue Sudoku: solving the Sudoku minimum number of clues problem via hitting set enumeration. *Experimental Mathematics*, 23(2):190-217, 2014.
- Restliche Abbildungen aus der Bachelorarbeit selbst